Calcul Littéral (2)

Identités remarquables, équation produit nul

I Développer avec des identités remarquables

Une façon particulière de développer consiste à utiliser 3 identités remarquables

1. Le carré d'une somme

a et b étant 2 nombres relatifs,

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Exemples :

- $(x + 3)^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times x \times 3}_{2ab} + \underbrace{3^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{x^2 + 6x + 9}}$

  on a ici a = x et b = 3

- $(7 + 5x^2 = \underbrace{7^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times 7 \times 5x}_{2ab} + \underbrace{(5x)^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{49 + 70x + 25x^2}}$

  on a ici a = 7 et b = $5x$

2. Le carré d'une différence

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Exemples :

- $(x - 3)^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{2 \times x \times 3}_{2ab} + \underbrace{3^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{x^2 - 6x + 9}}$

- $(3b - 4)^2 = \underbrace{(3b)^2}_{a^2} - \underbrace{2 \times 3b \times 4}_{2ab} + \underbrace{4^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{9b^2 - 24b + 16}}$

3. Le produit d'une somme de 2 nombres par leur différence

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Exemples :

- $(x + 3)(x - 3) = \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{3^2}_{b^2} = \underline{\mathbf{x^2 - 9}}$

  a b

- $(5x - 3)(5x + 3) = (5x)^2 - 3^2 = \underline{\mathbf{25x^2 - 9}}$

  a b

a^2 b^2

4. Applications au calcul mental :

- Calculer mentalement **99²**. On peut écrire que 99 = 100 – 1

Donc $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2$ *comme* $(a - b)^2$

$= 10\,000 - 200 + 1 =$ **9801**

- De même **98 x 102** $= (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2 =$ **9996**
- et **31²** $= (30 + 1)^2 = 900 + 60 + 1 =$ **961**

II Factoriser à l'aide d'une identité remarquable

Factoriser en reconnaissant une identité remarquable

L'expression $25 + 4x^2 - 20x$ est une somme de 3 termes qui n'ont pas de facteurs communs et pourtant nous allons réussir à la factoriser. Pour cela on remarque qu'elle a un « air de famille » avec $a^2 + b^2 - 2ab$

$25 + 4x^2 - 20x$

$5^2 + (2x)^2 - 2 \times 5 \times 2x$ d'où $(5 - 2x)^2$

La vérification se fait en développant le produit remarquable $(5 - 2x)^2$

On peut donc conclure que $\mathbf{25 + 4x^2 - 20x = (5 - 2x)^2}$

A retenir, les identités remarquables dans l'autre sens

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{array}}$$

On factorise

Exemples :

- $x^2 + 6x + 9 = \mathbf{(x + 3)^2}$

  c'est comme $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$

- $x^2 - 49 = \mathbf{(x + 7)(x - 7)}$

  c'est comme $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = x$ et $b = 7$

- $9x^2 - 32x + 25$ ressemble à $a^2 - 2ab + b^2$ mais $2ab = 2 \times 3x \times 5 = 30x$ au lieu de $32x$. Cela ne convient pas et on ne le factorisera pas.

- $9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

  c'est comme $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

- $(x + 2)^2 - 9$ est de la forme

  $a^2 - b^2$ avec $a = (x + 2)$ et $b = 3$ et devient donc

  $(a + b)(a - b)$ soit

  $[(x + 2) + 3][(x + 2) - 3]$ puis en réduisant dans les [ ]

  $[x + 2 + 3][x + 2 - 3] = \mathbf{(x + 5)(x - 1)}$

- $16 - (x + 6)^2$ *se factorise sur le même modèle que le précédent*

$= [4 + (x + 6)][4 - (x + 6)]$
$= [4 + x + 6][4 - x - 6]$ *à noter le changement de signe de $x + 6$ précédé de −*
$= (10 + x)(-2 - x)$

- $(3x - 1)^2 - (5x + 4)^2$ *est encore sur le même modèle $a^2 - b^2$*
  $= [(3x - 1) + (5x + 4)][(3x - 1) - (5x + 4)]$
  $= (3x - 1 + 5x + 4)(3x - 1 - 5x - 4)$
  $= \mathbf{(8x + 3)(-2x - 5)}$

- **Exercice : vu au brevet**
  On considère l'expression $E = 16x^2 - 25 + (x + 2)(4x + 5)$
  Factoriser $16x^2 - 25$ puis en déduire la factorisation de E.

III Equation produit nul

1. Une propriété bien connue de la multiplication

Dans un produit, si un facteur est nul alors ce produit est nul

Exemple : $3 \times (-4)^2 \times 2009 \times (2 - x) \times \mathbf{0} \times 10^{-12} = \mathbf{0}$
Réciproquement :

Si un produit est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Exemple : A, B, C et D étant 4 nombres relatifs
si A x B x C x D = 0 alors **A = 0** ou **B = 0** ou **C = 0** ou **D = 0**

2. Définition

Une **équation produit nul** est une équation dont le 1^{er} membre est un produit et dont le $2^{ème}$ membre est 0

Exemples :

$\underbrace{x(2x + 3)(x - 1)}_{\text{produit de 3 facteurs}} = 0$

$\underbrace{(x - 1)(x + 2)}_{\text{produit de 2 facteurs}} = 0$

$(x - 3) - (3x + 4) = 0$
$(x - 1)(5x - 3) = 3$
ne sont pas des équations produit nul

3. Résolution : Résoudre l'équation $x(2x + 3)(x - 1) = 0$

On a un produit (de 3 facteurs) nul donc l'un des facteurs est nul.

$x = 0$ ou $2x + 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$2x = -3$; $x = 1$
$x = \frac{-3}{2}$

Il y a 3 solutions **0**, $\mathbf{\frac{-3}{2}}$ et **1** facilement vérifiables dans l'équation de départ.

4. Certaines équations peuvent se ramener à une équation produit nul

$\mathbf{4x^2 = 5x}$
$4x^2 - 5x = 0$ On a mis tous les termes dans le 1^{er} membre
$x(4x - 5) = 0$ On a factorisé le 1^{er} membre,

On a un produit (de 2 facteurs) nul donc l'un des facteurs est nul.
Soit $x = 0$ soit $4x - 5 = 0$

D'où les 2 solutions $x = \mathbf{0}$ et $x = \mathbf{\frac{5}{4}}$

$(x + 6)(3x + 5) + (x + 6) = 0$

Le développement du 1^er^ membre aboutirait à une équation du 2^ème^ degré que nous ne savons pas résoudre. Nous allons comme précédemment factoriser le 1^er^ membre : facteur commun $(x + 6)$ d'où

$(x + 6)(3x + 5 + 1) = 0$

$(x + 6)(3x + 6) = 0$

On a un produit (de 2 facteurs) nul donc l'un des facteurs est nul.
Soit $x + 6 = 0$ soit $3x + 6 = 0$. On aboutit aux 2 solutions

$x = \mathbf{-6}$ et $x = \frac{-6}{3}$ ou $\mathbf{-2}$

$25 + 4x^2 = 20x$ On procède comme dans le 1^er^ exemple :

$25 + 4x^2 - 20x = 0$ et on factorise le 1^er^ membre comme $a^2 - 2ab + b^2$

$(5 - 2x)^2 = 0$

On a encore un produit de facteurs nul avec ici 2 fois le même facteur $(5 - 2x)$

Donc $5 - 2x = 0$ et une seule solution $x = \mathbf{\frac{5}{2}}$

5. Un cas particulier : l'équation $x^2 = a$

Trois exemples pour illustrer les cas qui peuvent se présenter :

- **$x^2 = 9$**. On procède comme dans les exemples du 4. pour se ramener à une équation produit nul.
  $x^2 - 9 = 0$
  $(x + 3)(x - 3) = 0$ **en factorisant sur le modèle $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$**
  Ce produit étant nul, l'un de ses deux facteurs est nul donc
  Soit $x + 3 = 0$ soit $x - 3 = 0$
  D'où les solutions $x = \mathbf{-3}$ et $x = \mathbf{3}$

- **$x^2 = -9$**. On peut se dire que comme un nombre au carré est toujours positif, on n'a aucune chance d'en trouver un qui vaut -9 donc cette équation n'a aucune solution.*(parmi tous les nombres que l'on connaît en 3^ème^)*

- **$x^2 = 0$** Il n'y a que le nombre zéro qui vérifie cette équation.
  Donc $x = \mathbf{0}$

> 1. **Si $a > 0$** l'équation **$x^2 = a$** admet 2 solutions $\sqrt{\mathbf{a}}$ et $-\sqrt{\mathbf{a}}$.
> 2. **Si $a < 0$** l'équation **$x^2 = a$** n'a **aucune solution.**
> 3. L'équation **$x^2 = 0$** admet une solution, 0

Exemples :

$x^2 = 11$ admet 2 solutions $x = \sqrt{\mathbf{11}}$ et $x = -\sqrt{\mathbf{11}}$

Vérifications $(\sqrt{11})^2 = 11$ et $(-\sqrt{11})^2 = 11$