Fonction Affine

I Définition d'une fonction affine

Faire l'activité 1 « une nouvelle fonction »

1. définition générale

> **a et b étant deux nombres relatifs donnés, une fonction affine est une fonction qui a un nombre x associe le nombre ax + b**

si on appelle *f* cette fonction, on note $f : x \longmapsto ax + b$
et on lit : « *f* est la fonction qui au nombre x fait correspondre le nombre $ax + b$ »
x est **l'antécédent** et $ax + b$ est **l'image** de x que l'on note $\boldsymbol{f(x)} = ax + b$

On peut aussi schématiser par une chaine d'opérateurs

$$x \xrightarrow{\text{x a}} ax \xrightarrow{+\text{ b}} ax + b$$

on multiplie par a puis *on ajoute b*

2. Exemples et exercices

On donne la fonction $f : x \longmapsto 5x - 1$
C'est une fonction affine dans laquelle a = 5 et b = -1

- **Calculer une image**

Calculer l'image des nombres 2 et -3 par la fonction *f*.
L'image de 2 se note *f* (2) et on fait les 2 opérations « *multiplier par a et ajouter b* »

	$f(2) = 2 \times 5 + (-1) = 10 - 1 = \mathbf{9}$	L'image de 2 est **-9**
de même	$f(-3) = -3 \times 5 - 1 = -15 - 1 = \mathbf{-16}$	L'image de -3 est **-16**

- **Calculer un antécédent**

Calculer l'antécédent du nombre 7 par la fonction *f*.
On cherche donc un nombre x tel que $f(x) = 5x - 1$
On admet que dans une fonction affine tout nombre a un antécédent.
On écrit que l'image de x est égale à 7 d'où $5x - 1 = 7$
et on résout cette équation $5x = 7 + 1$

$5x = 8$ et $x = \mathbf{\frac{8}{5}}$ L'antécédent de 7 est $\mathbf{\frac{8}{5}}$ ou 1,6

On peut aussi schématiser la situation par une chaine d'opérateurs en écrivant les opérateurs contraires pour « revenir » à x

$$x \xrightarrow{\text{x 5}} \dots\dots \xrightarrow{-\ 1} 7$$
$$x \xleftarrow{:\ 5} \dots\dots \xleftarrow{+1} 7$$

d'où $x = (7 + 1) : 5 = 8 : 5 = 1{,}6$ ou $\frac{8}{5}$

3. Cas particuliers

- si a = 0 la fonction $f(x) = ax + b$ devient $f(x) = 0 \times x + b = 0 + b = b$
- si b = 0 la fonction $f(x) = ax + b$ devient $f(x) = ax + 0 = ax$

Si a = 0, la fonction affine devient $f(x)$ = b appelée une **fonction constante**
Si b = 0, la fonction affine devient $f(x)$ = **a**x **, fonction linéaire**

Exercice résolu : Préciser si les fonctions suivantes sont affines, linéaires, constantes ou autres (chercher quand c'est possible la valeur de a et de b).

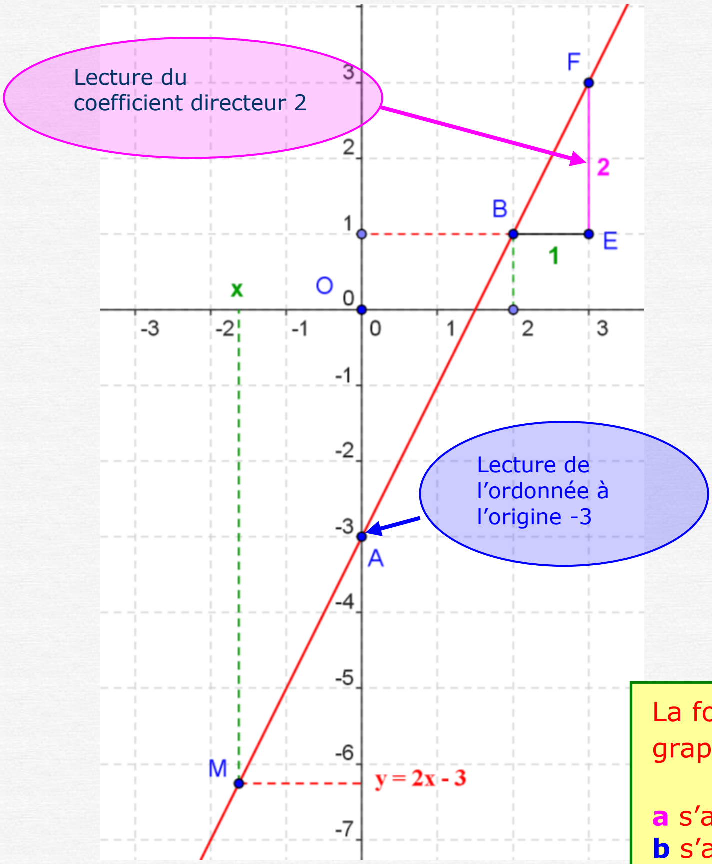
fonction	Ecriture simplifiée	a	b	réponse
$f: x \longmapsto 7x - 1 + 2x - 5$	$9x - 6$	9	-6	affine
$g: x \longmapsto -6x \times 4$	$-24x$	-24	0	linéaire
$h: x \longmapsto x : 3$	$\frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3}$	0	linéaire
$i: x \longmapsto 3 : x$	$\frac{3}{x}$	?	?	autre
$j: x \longmapsto 3 - 2x$	$-2x + 3$	-2	3	affine
$k: x \longmapsto 2(2x - 1) - 4x$	$4x - 2 - 4x = 0x - 2 = -2$	0	-2	constante
$l: x \longmapsto x \times x$	x^2	?	?	autre

II Représentation graphique

Faire l'activité 2« représentation graphique d'une fonction linéaire »

Nous admettons que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite

Exemple 1: Soit la fonction $f(x) = 2x - 3$. C'est une fonction affine (avec a = 2 et b = -3)



Sa représentation graphique est une droite.
Dans un tableau de valeurs, on recherche 2 points pour les placer dans un repère.
On choisit 2 valeurs de x quelconques mais facilement lisibles dans le repère. (ici 0 et 2) et on calcule leurs images $f(0)$ et $f(2)$ par la fonction f.

x	0	2	en abscisse
$f(x) = 2x - 3$	-3	1	en ordonnée
les points	A	B	

On obtient les points A(0 ;-3) et B(2 ; 1)
Pour tout point M(x ; y) de la droite (AB), l'ordonnée y vérifie l'équation $y = 2x - 3$ qu'on appelle l'équation de la droite.
Réciproquement si un point M a des coordonnées (x ; y) telles que $y = 2x - 3$ alors ce point sera sur la droite (AB).

La fonction affine $f(x)$ = **a**x + **b** est représentée graphiquement par la droite d'équation y = **a**x + **b**.

a s'appelle le coefficient directeur de la droite
b s'appelle l'ordonnée à l'origine
(x ; y) sont les coordonnées de n'importe quel point de la droite

L'ordonnée à l'origine se lit sur l'axe des ordonnées, au point d'intersection avec la droite.
Le coefficient directeur correspond à l'accroissement des y (les ordonnées) lorsque les x (les abscisses) croissent de 1. (Voir ces 2 lectures sur la figure)
On peut noter que le coefficient directeur indique la pente de la droite :

- s'il est positif (comme ici) la droite « monte »
- s'il est négatif (voir exemple suivant) la droite descend.

Voir l'activité 3 sur le fichier géogébra

A propos des repères du plan
- un repère est dit « orthogonal » si les axes sont perpendiculaires,
- un repère est dit « orthonormal » si, en plus l'unité est la même sur les deux axes.

Exemple 2: Représenter graphiquement dans le même repère les 2 fonctions

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \text{et} \quad h(x) = 3$$

La fonction g est affine ($a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2$) et sera représentée par une droite,

La fonction h est constante ($a = 0$ et $b = 3$) et sera représentée aussi par une droite.

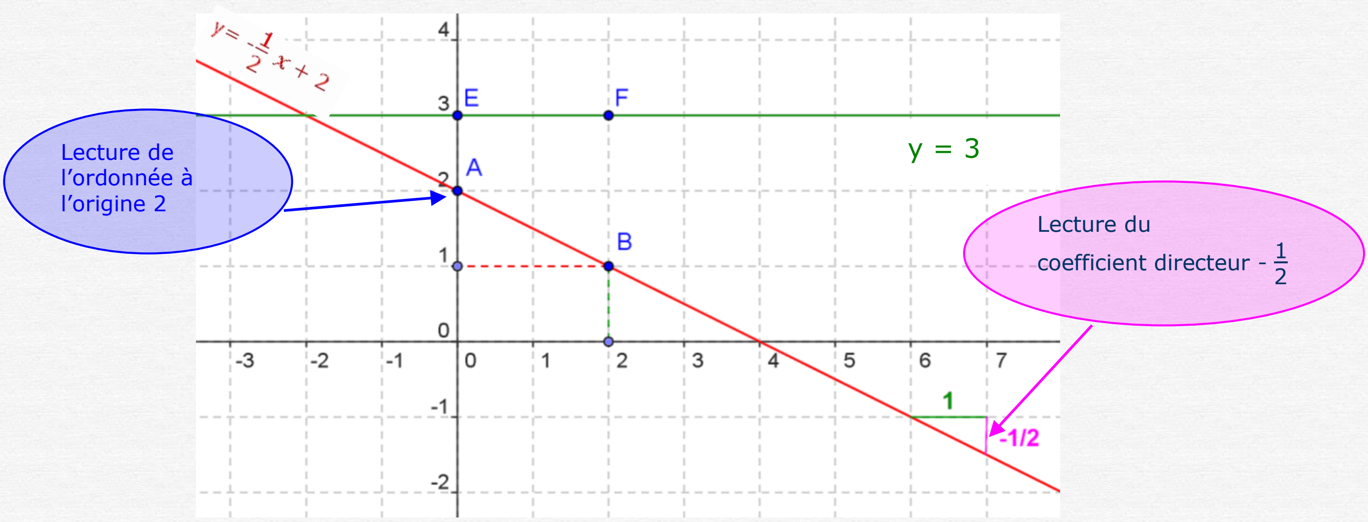
(on rappelle qu'une fonction constante est un cas particulier d'une fonction affine)

Les 2 tableaux de valeurs :

x	0	2
$g(x)$	2	1
les points	A	B

x	0	2
$h(x)$	3	3
les points	E	F

On remarque que pour la fonction constante h, tous les nombres auront la même image 3



La droite (AB) a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 2$ et la droite (EF) a pour équation $y = 3$

III Proportionnalité des accroissements

Exercice :

Une société de location de voitures propose les tarifs suivants pour le week-end : versement de 110€ puis 0,25€ par km parcouru.

1. Quel est le prix à payer pour un parcours de 200km, de 240km, de 400km, de x km ?
2. Combien de km peut-on parcourir pour 295 € ?
3. Représenter graphiquement le prix le prix à payer en fonction du nombre de km

Résolution :

1) pour 200km, le prix est 200 x 0,25 + 110 = 50 + 110 = **160€**
pour 240km, le prix est 240 x 0,25 + 110 = 60 + 110 = **170€**
pour 400km, le prix est 400 x 0,25 + 110 = 100 + 110 = **210€**
pour x km le prix est x x 0,25 + 110 = **0,25x + 110 €**

Le prix apparaît comme une fonction affine du nombre de km $p\ (x) = 0{,}25x + 110$

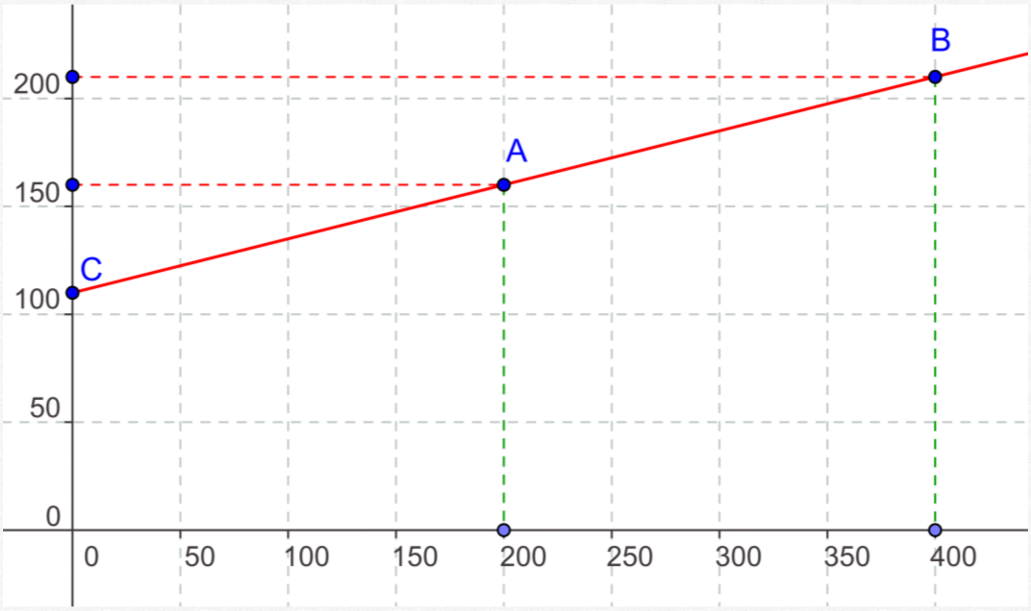
2) Avec un prix de 295€, on peut écrire $0{,}25x + 110 = 295$ et résoudre cette équation $0{,}25x = 295 - 110$

$0{,}25x = 185$ et $x = 185 : 0.25 =$ **740km**

3) Utilisons les résultats précédents pour tracer la droite qui sera la représentation graphique de $p\ (x) = 0{,}25x + 110$

200 a pour image 160 $\longrightarrow$ A (200 ; 160)

et 400 a pour image 210 $\longrightarrow$ B (400 ; 210)



Le point C correspond à 0km et 110€

Plaçons les résultats dans un tableau.

Accroissement des km		40		160	
Nombre de km	200		240		400
Prix	160		170		210
Accroissement du prix		10		40	

X 0,25

On s'aperçoit qu'il y a proportionnalité entre l'accroissement des km et l'accroissement du prix et que le coefficient est le nombre 0,25

Dans une fonction affine $f\ (x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$, les accroissements sont proportionnels
Si $(x_2 - x_1)$ est l'accroissement des valeurs x
$f\ (x_2) - f\ (x_1)$ est l'accroissement des valeurs de $f\ (x)$
alors

$(x_2 - x_1) \times \mathbf{a} = f\ (x_2) - f\ (x_1)$ ou $\mathbf{a} = \dfrac{f\ (x_2) - f\ (x_1)}{x_2 - x_1}$

IV Détermination d'une fonction affine

Une fonction affine $f\ (x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ est déterminée si on connaît les 2 nombres **a** et **b**

La propriété précédente, nous permet de calculer **a** connaissant deux nombres et leurs images.

Exemple 1:

f est une fonction affine et on sait que *f* : $3 \longmapsto 9$ *(3 a pour image 9)*

f : $-2 \longmapsto -1$ *(-2 a pour image -1)*

Déterminer la fonction *f* .

f est une fonction affine, elle est donc de la forme $f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$

Calcul du coefficient a : $\mathbf{a} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *(proportionnalité des accroissements)*

Ici on peut prendre $x_1 = 3$ et $f(x_1) = 9$

$x_2 = -2$ et $f(x_2) = -1$ d'où $\mathbf{a} = \dfrac{-1 - 9}{-2 - 3} = \dfrac{-10}{-5} = \mathbf{2}$

f peut donc s'écrire $f(x) = \mathbf{2}x + b$

Calcul du nombre **b** : Exprimons que 9 est l'image de 3 par la fonction *f* :

$3 \times \mathbf{2} + \mathbf{b} = 9$ d'où $6 + \mathbf{b} = 9$ d'où $\mathbf{b} = 9 - 6 = \mathbf{3}$

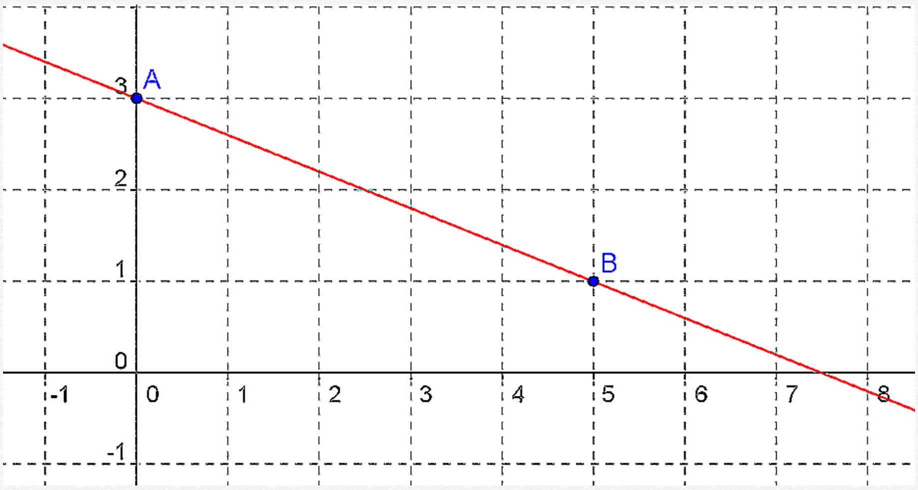
La fonction *f* s'écrit donc $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$

On peut vérifier avant de conclure que l'équation est vérifiée pour l'autre nombre (-2)

$-2 \times \mathbf{2} + 3 = -1$ ce qui donne après calculs $-1 = -1$ et confirme notre résultat $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$

Exemple 2:

Déterminer une fonction affine à partir de sa représentation graphique



Soi $g(x) = \mathbf{a}x + \mathrm{b}$ la fonction affine recherchée

On peut lire sur cette représentation graphique les coordonnées de A et de B

A(0 ;3) donc 0 a pour image 3 ou $g(0) = 0\mathbf{a} + \mathbf{b} = 3$

et B(5 ;1) donc 5 a pour image 1 ou $g(5) = 5\mathbf{a} + \mathbf{b} = 1$

La même méthode que précédemment peut être utilisée *(calcul de a avec la formule de proportionnalité des accroissements puis b)*

mais ici la première équation nous donne immédiatement la valeur de **b** = 3.

Il suffit ensuite de remplacer **b** par cette valeur dans la deuxième équation

ce qui donne $5\mathbf{a} + \mathbf{3} = 1$

$5\mathbf{a} = 1 - 3 = -2$ et $\mathbf{a} = -\dfrac{2}{5}$ ou $-0{,}4$

et de conclure $g(x) = \boldsymbol{-\dfrac{2}{5}}x + \mathbf{3}$