

SYSTÈME D'ÉQUATIONS à deux inconnues

I Définition

a, b, c, d, e, f étant des nombres relatifs,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$
 est un **système de 2 équations** du 1^{er} degré à deux inconnues x et y .

Exemple :
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

Remarques :

- La lettre x représente le même nombre dans les deux équations, de même la lettre y .
- $(x ; y)$ s'appelle un **couple**. x est le premier nombre et y est le 2^{ème}.

Résoudre le système :

Résoudre un système d'équations à deux inconnue x et y , c'est trouver tous les couples $(x ; y)$ pour lesquels, les deux équations sont vérifiées simultanément.

Testons le couple $(1 ; 1)$ $\begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{matrix} 2 \times 1 - 1 = 1 \text{ soit } 1 = 1, \text{ ce qui est vrai} \\ 1 - 2 \times 1 = -4 \text{ soit } -1 = -4 \text{ ce qui est faux} \end{matrix}$

Testons le couple $(0 ; 2)$ $\begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{matrix} 2 \times 0 - 2 = 1 \text{ soit } -2 = 1, \text{ ce qui est faux} \\ 0 - 2 \times 2 = -4 \text{ soit } -4 = -4, \text{ ce qui est vrai} \end{matrix}$

Les 2 couples $(1 ; 1)$ et $(0 ; 2)$ ne sont pas solution du système.

II Interprétation graphique

L'équation $\textcircled{1} 2x - y = 1$ peut s'écrire $y = 2x - 1$

de même l'équation $\textcircled{2} x - 2y = -4$ peut s'écrire $2y = x + 4$ et $y = \frac{1}{2}x + 2$

Sous cette forme, ce sont 2 équations de droites qui représentent 2 fonctions affines.

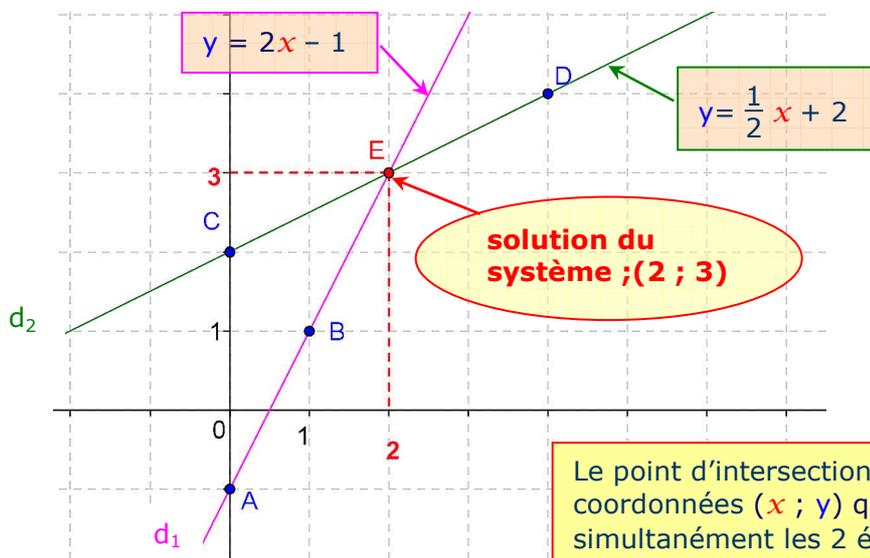
$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ que l'on peut représenter. (voir leçon fonction affine II)

tableaux de valeurs

x	0	1		x	0	4
$y = 2x - 1$	-1	1		$y = 1/2x + 2$	2	4
points	A	B		points	C	D

Soit (d_1) la droite (AB)

Soit (d_2) la droite (CD)



Pour tout point $M(x ; y)$ de (d_1) on a $y = 2x - 1$
 De même pour tout point $M(x ; y)$ de (d_2) on a $y = \frac{1}{2}x + 2$.

III Résolution algébrique

1. Méthode par addition

Le principe : **Annuler l'une des 2 inconnues en additionnant les 2 équations membre à membre.**

Exemple : Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases}$$

Pour annuler l'une des inconnues par addition, il faut que leurs coefficients soient opposés. Pour cela nous allons **multiplier les 2 membres** par un même nombre. Par exemple

Dans l'équation (1) on multiplie par 2 $\longrightarrow 4x + 6y = 10$
 Dans l'équation (2) on multiplie par (-3) $\longrightarrow -15x - 6y = -54$
 On obtient $6y$ et $-6y$ qui vont s'annuler par addition des premiers membres.

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ -15x - 6y = -54 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre $-11x = -44$ d'où $x = \frac{-44}{-11} = 4$

On remplace maintenant x par la valeur trouvée (4) dans l'une des équations.

Dans l'équation (1) $2 \times 4 + 3y = 5$
 $8 + 3y = 5$
 $3y = 5 - 8$ et $y = \frac{-3}{3} = -1$

On vérifie en remplaçant dans l'autre équation les 2 inconnues par les valeurs trouvées.

Dans l'équation (2) $5 \times 4 + 2 \times (-1) = 18$
 $20 + (-2) = 18$
 $18 = 18$. Ce qui permet de conclure :

La solution du système est le couple (4 ; -1)

Exercices : Résoudre par cette méthode les systèmes

$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 12x + y = -7 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - y = 40 \\ x + y = 100 \end{cases}$$

2. Méthode par substitution :

Le principe :

Calculer l'une des 2 inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations.

Exemple : Résoudre le système :
$$\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 12x + y = -7 \end{cases}$$

On voit qu'il est aisé d'exprimer y en fonction de x dans l'équation (2)

Dans l'équation (2) $y = -7 - 12x$

On remplace y par sa valeur $-7 - 12x$ dans l'équation (1).

(remplacer = substituer)

Ce qui donne (1) $4x - 3(-7 - 12x) = 1$

Il suffit maintenant de résoudre cette équation à une seule inconnue x :

$$4x + 21 + 36x = 1$$

$$40x = 1 - 21$$

$$40x = -20 \quad \text{et} \quad x = \frac{-20}{40} = -\frac{1}{2}$$

On remplace maintenant x par la valeur trouvée $-\frac{1}{2}$ dans l'une des 2 équations

Dans l'équation (2) $12x \left(-\frac{1}{2}\right) + y = -7$

$$-6 + y = -7$$

$$y = -7 + 6$$

$$y = -1$$

On vérifie dans l'équation (1) $4x \left(-\frac{1}{2}\right) - 3x(-1) = 1$

$$-2 + 3 = 1$$

$1 = 1$. Ce qui permet de conclure

La solution du système est le couple $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

Exercices : Résoudre par cette méthode les systèmes

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

III Mise en équation d'un problème à 2 inconnues

Problème :

Un professionnel achète 76 plants d'arbres fruitiers : des pommiers à 10€ le pied et des poiriers à 12,90€ le pied. Sa facture s'élève à 893,40€. Déterminer le nombre de pommiers et le nombre de poiriers

la méthode :

1. Choix des 2 inconnues	Soit x le nombre de pommiers et y le nombre de poiriers.
2. Mise en équations du problème Il faut écrire 2 équations.	Il achète 76 plants donc $x + y = 76$ Sa facture est de 893,40€ donc $10x + 12,90y = 893,40$
3. Résolution du système par La méthode de notre choix (ici l'addition)	$\begin{cases} x + y = 76 \\ 10x + 12,90y = 893,40 \end{cases}$ $\begin{array}{r} \textcircled{1} \quad x \quad (-10) \longrightarrow -10x - 10y = -760 \\ \textcircled{2} \quad \longrightarrow \quad \underline{10x + 12,90y = 893,40} \\ \phantom{\textcircled{2} \quad \longrightarrow} + 2,90y = 133,40 \\ \phantom{\textcircled{2} \quad \longrightarrow} y = \frac{133,40}{2,90} = 46 \end{array}$ Dans $\textcircled{1}$ $x + 46 = 76$ d'où $x = 76 - 46 = 30$
4. Vérification du résultat	Dans $\textcircled{2}$ $10 \times 30 + 12,90 \times 46 = 893,40$ $300 + 593,40 = 893,40$ $893,40 = 893,40$
5. Réponse au problème posé	Il a acheté 30 pommiers et 46 poiriers.