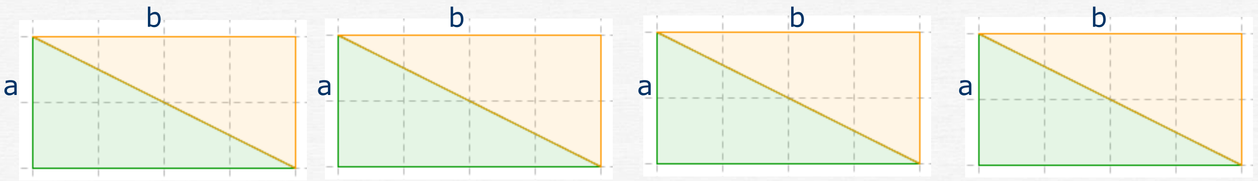
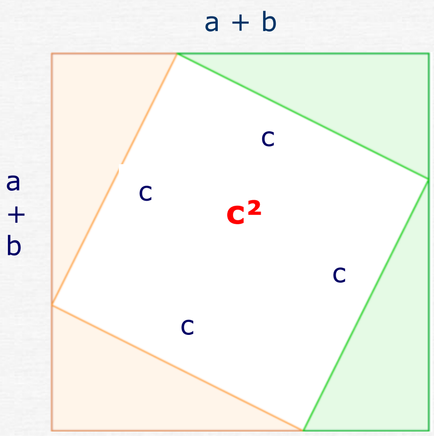
TRIANGLE RECTANGLE

Egalité de Pythagore

I Le théorème de Pythagore

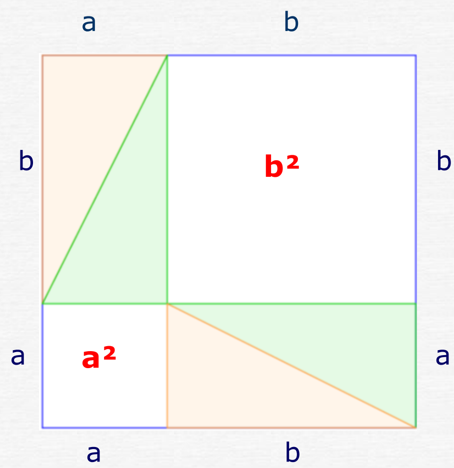
Activité On découpe 4 rectangles coloriés de côtés **a** et **b** comme ceux-ci et on les place en les découpant dans 2 carrés de côté (a + b). On appelle **c** la longueur de la diagonale.





On peut facilement prouver que le quadrilatère blanc de la figure de gauche est un carré. Son aire est c^2.
L'aire blanche des 2 carrés de la figure de droite ($b^2 + c^2$) est égale à l'aire blanche de la figure de gauche. *(C'est l'aire du grand carré moins 2 rectangles)*. On en déduit que

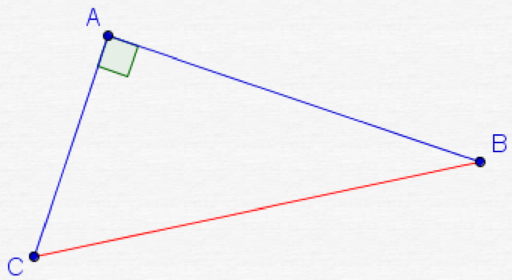
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Voir aussi l'animation avec Géogébra

Enoncé du théorème de Pythagore

> **Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit**



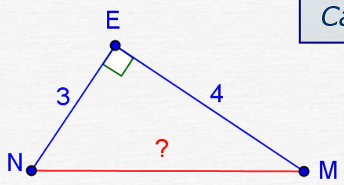
Enoncé avec les points de la figure

> **Si ABC est un triangle rectangle en A alors $\underbrace{BC^2}_{\text{hypoténuse}} = \underbrace{AB^2 + AC^2}_{\text{côtés de l'angle droit}}$**

A retenir
On va utiliser le théorème de Pythagore pour calculer un côté d'un triangle rectangle lorsqu'on connaît les deux autres

Exemple 1 :

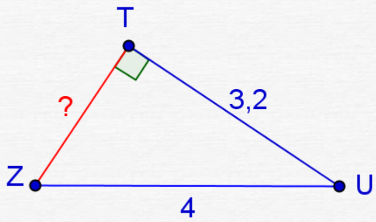
On donne triangle MEN rectangle en E, EN = 3cm et EM = 4cm.
Calculer la longueur MN.



On repère ***l'hypoténuse [MN]***
Le triangle MEN est rectangle en E donc d'après le théorème de Pythagore, $MN^2 = EN^2 + EM^2$
On remplace les lettres par les longueurs connues :
$MN^2 = 3^2 + 4^2$
On fait les calculs en respectant les priorités $MN^2 = 9 + 16$
$MN^2 = 25$
On cherche mentalement le nombre qui a pour carré 25 : c'est 5.
On conclut **MN = 5cm**

Exemple 2 :

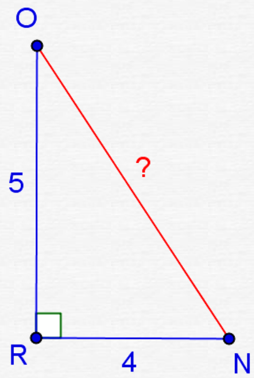
On donne triangle ZUT rectangle en T, TU = 3,2cm et ZU = 4cm.
Calculer la longueur ZT.



On repère ***l'hypoténuse [ZU].*** *On remarque que sa longueur est donnée.*
Le triangle ZUT est rectangle en T donc d'après le théorème de Pythagore, $ZU^2 = TZ^2 + TU^2$
On remplace les lettres par les longueurs connues :
$4^2 = TZ^2 + 3{,}2^2$
Pour trouver un côté de l'angle droit, il faut faire une soustraction
On en déduit $TZ^2 = 4^2 - 3{,}2^2$
D'où $TZ^2 = 16 - 10{,}24 = 5{,}76$
$TZ^2 = 5{,}76$. *A l'aide de la calculatrice, on cherche le nombre dont le carré est 5,76.*
Il faut taper $\sqrt{\ }$ puis 5,76 puis = le résultat affiché est 2,4. On écrira
D'où **TZ = 2,4cm** On peut vérifier que $2{,}4^2 = 5{,}76$

Exemple 3 :

On donne triangle RON rectangle en R, RN = 4cm et RO = 5cm.
Calculer ON^2 puis la longueur ON à 1mm près.



On repère ***l'hypoténuse [ON]***
Le triangle RON est rectangle en R donc d'après le théorème de Pythagore, $ON^2 = RN^2 + RO^2$
On remplace les lettres par les longueurs connues :
$ON^2 = RN^2 + RO^2$
$ON^2 = 4^2 + 5^2$
$ON^2 = 16 + 25 = 41$ on répond **$ON^2 = 41$**
La calculatrice affiche pour $\sqrt{41} \longrightarrow 6.403124237$
Il faut donc donner un arrondi de la longueur
On écrira **d'où ON ≈ 6,4cm** à 1mm près.

Exercices :

1) Combien mesure la diagonale d'un carré de côté 10cm ?

2) La diagonale d'un rectangle mesure 13cm et l'un des côtés 12cm. Calculer en justifiant la longueur de l'autre côté.

II Réciproque du théorème de Pythagore

Activité :

> Construire un triangle dont les dimensions sont 10cm, 8cm et 6cm.
> Quelle remarque peut-on conjecturer sur la nature de ce triangle ?
> Calculer le carré du plus grand côté.
> Puis la somme des carrés des 2 autres côtés. Comparer les 2 résultats
>
> Refaire l'exercice avec 13cm, 12cm et 5cm.

Faire cette activité avec Géogebra

Théorème réciproque de Pythagore

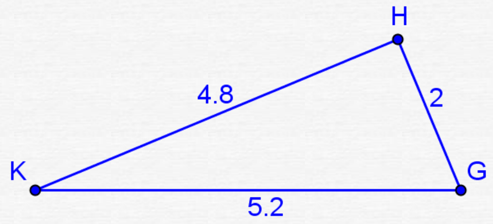
> Si les côtés d'un triangle ABC vérifient la relation $BC^2 = AB^2 + AC^2$
> alors ce triangle est rectangle en A

A retenir

On va utiliser le théorème réciproque de Pythagore pour montrer qu'un triangle est rectangle à condition de connaître les longueurs des 3 côtés.

Exemple 1 :

> *Construire le triangle GHK sachant que KG = 5,2cm, KH = 4,8cm et HG = 2cm.*
> *Montrer que ce triangle est rectangle.*



Réflexion préalable :

Ce triangle semble rectangle en H après la construction mais pour le prouver il faut utiliser un théorème.
On connait les longueurs des 3 côtés, on peut donc tenter la réciproque de Pythagore

Rédaction de la solution :

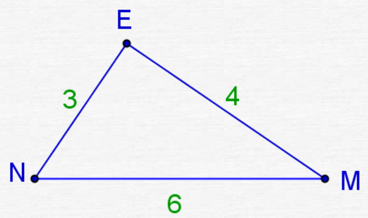
Le plus grand côté est [KG] donc si le triangle est rectangle, l'hypoténuse sera [KG].
Deux calculs séparés sont nécessaires pour voir si la propriété de Pythagore est vérifiée

- *L'hypoténuse au carré* $KG^2 = 5{,}2^2 = 27{,}04$
- *La somme des carrés des 2 autres côtés* $HK^2 + HG^2 = 4{,}8^2 + 2^2 = 27{,}04$.

On a donc $KG^2 = HK^2 + HG^2$ donc le triangle GHK est rectangle en H d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Exemple 2 :

> *Construire le triangle MEN sachant que MN = 6cm, NE = 3cm et EM = 4cm.*
> *Ce triangle est-il rectangle ? Justifier.*



Même raisonnement que précédemment

Le plus grand côté est [MN] donc si le triangle est rectangle, l'hypoténuse sera [MN].
Toujours les 2 calculs séparés $MN^2 = 6^2 = 36$

$$EN^2 + EM^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

On constate ici que $MN^2 \neq EN^2 + EM^2$

La propriété de Pythagore n'étant pas vérifiée, le triangle MEN n'est pas rectangle.

On ne parlera pas de réciproque de Pythagore car on n'a pas les données nécessaires.

Problème :

Construire un rectangle ABCD sachant que AD = 4cm et AB = 8,2cm.
Placer un point E sur le segment [AB] tel que AE = 5cm.

1. Calculer une valeur approchée à 1mm près de la longueur ED
2. Calculer une valeur approchée à 1mm près de la longueur EC
3. Le triangle ECD est-il rectangle ?