Ordre et Opérations

I Notations et définitions

> Les symboles <, >, ⩽ et ⩾ sont des symboles d'inégalité et sont utilisés pour comparer des nombres.

Exemples :

- 34,7**5**89 < 34,7**6**5 se lit :
  34,7589 est inférieur à 34,765
  (Car 5<6 au rang des centièmes, les chiffres précédents étant identiques)

- 2■5,4 ⩾ 205,4 se lit :
  2■5,4 est supérieur ou égal à 205,4
  (Car ■ peut être remplacé par 0,1, 2, 3 ….)

- $x > 4$ signifie « x est strictement supérieur à 4 »
  $x < 7$ signifie « x est strictement inférieur à 7 »

- $y \geqslant 3$ signifie que « y est supérieur ou égal à 3 »
  $y \leqslant 3$ signifie que « y est inférieur ou égal à 3 »

Cas particuliers

- $m > 0$ signifie que m est strictement positif *(positif et non nul)*
  $m < 0$ signifie que m est strictement négatif *(négatif et non nul)*

- $n \geqslant 0$ signifie n est positif ou nul
  $n \leqslant 0$ signifie n est négatif ou nul

II Troncature, encadrement et arrondi

(Rappel)

Soit le nombre $q = \dfrac{32{,}789}{4{,}3} \approx 7{,}6253488.....$ *(quotient en écriture décimale)*

	troncature	encadrement	arrondi
q à l'unité près	7	7 ⩽ q < 8	8
q au dixième près	7,6	7,6 ⩽ q < 7,7	7,6
q au centième près	7,62	7,62⩽ q < 7,63	7,63
q au millième près	7,625	7,625 ⩽ q < 7,626	7,625

On a coupé les chiffres qui dépassent : tronquer = couper

quotient par défaut

quotient par excès

C'est le quotient le plus proche

Pour trouver l'arrondi à l'unité, on regarde le chiffre des dixièmes :
Si c'est 0, 1, 2, 3, 4, l'arrondi est la valeur par défaut
Si c'est 5, 6, 7, 8, 9, l'arrondi est la valeur par excès.

III Comparaison de 2 nombres relatifs

1. Vu dans les classes précédentes :

Les nombres sont rangés dans le même ordre que les points sur une droite graduée.

Ici, on a $-5 < -2 < 1 < \frac{5}{3} < 4{,}5$

Mais aussi, autres exemples : $2 > -45$ $-7 < 2$ $-5 < -4$ $-20 > -21$

> Si 2 nombres sont de signes différents, le plus grand est le nombre positif
> Si 2 nombres sont négatifs, le plus grand est celui qui a la plus petite distance à zéro.

2. Comparer 2 nombres en calculant leur différence

Propriétés :

> a et b étant deux nombres relatifs,
> - Si $a - b < 0$ alors $a < b$
> - Si $a - b > 0$ alors $a > b$
> - Si $a - b = 0$ alors $a = b$

Les réciproques sont également vraies

Exemples : Comparer $\frac{456}{367}$ et $\frac{5218}{4131}$.

Le calcul de $\frac{456}{367} - \frac{5218}{4131}$ à la calculatrice donne $\approx -0{,}0206\ldots$ On a donc $\frac{456}{367} - \frac{5218}{4131} < 0$,

d'après la propriété précédente on peut conclure que $\frac{456}{367} < \frac{5218}{4131}$

3. Quelques remarques pour comparer des fractions

- Il est facile de comparer une fraction au nombre 1

> a et b étant deux nombres positifs,
>
> si $a < b$ alors $\frac{a}{b} < 1$ et si $a > b$ alors $\frac{a}{b} > 1$

- Si elles ont le même dénominateur, les fractions sont dans le même ordre que les numérateurs

  Exemple : $\frac{14}{27} < \frac{16}{27}$ car $14 < 16$

  On utilise souvent cette méthode pour comparer 2 fractions

  Exemple : Pour comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{6}{9}$ on les met au même dénominateur 72

  $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \mathbf{\frac{45}{72}}$ et $\frac{6}{9} = \frac{6 \times 8}{9 \times 8} = \mathbf{\frac{48}{72}}$. Comme $\frac{45}{72} < \frac{48}{72}$, on en déduit que $\frac{5}{8} < \frac{6}{9}$

- Si elles ont le même numérateur, les fractions sont dans l'ordre inverse des dénominateurs

  Exemple : $\frac{7}{18} > \frac{7}{19}$ car $18 < 19$

IV Ordre et opérations

1. Ordre avec l'addition et la soustraction

Dans une inégalité, l'ordre ne change pas si on ajoute (ou soustrait) un même nombre aux 2 membres

a, b et c étant 3 nombres relatifs si $a < b$ alors $a + c < b + c$
et $a - c < b - c$

Exemples :

Si $a<b$ alors $a + \frac{2}{7} < b + \frac{2}{7}$

Si $a>b$ alors $a - 5 > b - 5$

Si $x \leqslant 7$ alors $x + 3 \leqslant 10$ On a ajouté 3 aux 2 membres

Et si $y - 4 \geqslant -10$ alors $y \geqslant -10 + 4$ donc $y \geqslant -6$ On a ajouté 4 aux 2 membres

2. Ordre avec la multiplication

Dans une inégalité, l'ordre ne change pas si on multiplie les 2 membres par un même nombre strictement positif

a, b et c étant 3 nombres relatifs si $a < b$ alors $a \times c < b \times c$
avec $c > 0$

Dans une inégalité, l'ordre est inversé si on multiplie les 2 membres par un même nombre strictement négatif

a, b et c étant 3 nombres relatifs si $a < b$ alors $a \times c > b \times c$
avec $c < 0$

Quelques exemples numériques :

$5 < 8$, en multipliant les 2 membres par 2 on obtient
$10 < 16$, mais en multipliant les 2 membres par -2 on obtient
-10 et -16 et dans ce cas $-10 > -16$ L'inégalité a changé de sens

$-2 > -3$ en multipliant par 3 on obtient $-6 > -9$
En multipliant par -3 on obtient $6 < 9$ L'inégalité a changé de sens

Exemples :

Si $a < b$ alors $2a < 2b$ mais $-3a > -3b$ de même $-a > -b$

Si $\frac{x}{7} \leqslant -3$ alors en multipliant les 2 membres pas 7 on obtient $x \leqslant -21$

Si $\frac{x}{-6} > 2$ alors en multipliant les 2 membres par -6 on obtient $x < -12$

L'inégalité a changé de sens